Indice

1 Meccanica Orbitale 1

1.1 Il moto dei pianeti e le leggi di Keplero 3
1.2 Il problema degli \( n \)-corpi 4
1.3 Potenziale gravitazionale di un corpo sferico 8
1.4 Il problema dei due corpi (moto kepleriano) 11
   1.4.1 Conservazione dell’energia meccanica 12
   1.4.2 Conservazione del momento della quantità di moto 13
   1.4.3 L’equazione della traiettoria 14
   1.4.4 Dimostrazione della 2ª e 3ª legge di Keplero 24
   1.4.5 Velocità circolare, di fuga e di eccesso iperbolico 28
1.5 Classificazione delle orbite 30
1.6 Unità canoniche 31
1.7 Note e riferimenti bibliografici 32

2 Sistemi di riferimento e misura del tempo 39
2.1 La sfera celeste 39
2.2 Il Sistema di riferimento Eiocentrico-Eclittico 41
   2.2.1 Moto del sistema di riferimento Eiocentrico-Eclittico 42
2.3 Il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale 43
   2.3.1 Conversione \((\alpha, \delta, r) \rightarrow (x, y, z)\) e viceversa 45
   2.3.2 Conversione \((\lambda, \phi, h) \rightarrow (x, y, z)\) e viceversa 45
2.4 Il sistema di riferimento Topocentrico-Orizzontale 51
2.5 Il sistema di riferimento Perifocale 52
2.6 La misura del tempo 52
   2.6.1 Introduzione 52
   2.6.2 Tempo siderale 53
   2.6.3 Tempo solare 54
   2.6.4 Tempo solare medio e tempo universale 54
   2.6.5 Tempo delle effemeridi 55
   2.6.6 L’anno 55
2.6.7 La Data Giuliana ........................................ 55
2.6.8 Conversioni temporali ..................................... 56
2.7 Note e riferimenti bibliografici ............................. 56

3 Elementi orbitali e trasformazioni di coordinate ......... 57
  3.1 I sei elementi orbitali classici ............................ 57
  3.2 Trasformazioni di coordinate .............................. 62
    3.2.1 Rotazioni elementari ................................ 62
    3.2.2 Trasformazione $T_G \rightarrow T_T$ e viceversa ....... 65
    3.2.3 Trasformazione di coordinate $T_G \rightarrow T_P$ e viceversa .... 69
  3.3 Calcolo degli elementi orbitali sulla base di $r$ e $v$ .......... 71
  3.4 Calcolo di $r$ e $v$ sulla base degli elementi orbitali ........ 76
  3.5 Note e riferimenti bibliografici .......................... 80

4 Calcolo della posizione del satellite in funzione del tempo .. 85
  4.1 Ellisse e iperbole: proprietà analitiche .................. 85
  4.2 Legame tra anomalia vera ed anomalia eccentrica ......... 88
  4.3 L’equazione di Keplero .................................... 91
    4.3.1 L’equazione di Keplero in forma analitica .......... 97
  4.4 Tempo di volo su orbita parabolica ........................ 98
  4.5 Tempo di volo su orbita iperbolica ....................... 102
    4.5.1 Interpretazione geometrica di $F$ ................... 105
  4.6 Soluzione del problema inverso di Keplero ................. 107
    4.6.1 Soluzione per orbita ellittica ....................... 108
    4.6.2 Soluzione per orbita parabolica ..................... 114
    4.6.3 Soluzione per orbita iperbolica ..................... 119
  4.7 Formule universali per le orbite coniche ................. 123
  4.8 Gli invarianti fondamentali di Lagrange .................. 123
  4.9 Effemeridi dei pianeti .................................... 129
    4.9.1 Effemeridi di bassa precisione ..................... 130
  4.10 Note e riferimenti bibliografici ........................ 132

5 Problemi di meccanica orbitale ............................ 141
  5.1 Mutua visibilità di due satelliti ........................ 141
  5.2 Studio delle condizioni di eclissi di un satellite .......... 146
    5.2.1 Calcolo della posizione del Sole ................... 147
    5.2.2 Eclissi con modello d’ombra cilindrico ............. 149
    5.2.3 Eclissi con modello d’ombra conico ................ 149
  5.3 Orizzonte del satellite ................................... 156
    5.3.1 Arco spazzato ...................................... 157
    5.3.2 Campo di vista ..................................... 158
  5.4 Determinazione orbitale con misure di posizione ........... 162
<table>
<thead>
<tr>
<th>Capitolo</th>
<th>Titolo</th>
<th>Pagina</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>5.5</td>
<td>Determinazione orbitale con misure angolari</td>
<td>168</td>
</tr>
<tr>
<td>5.6</td>
<td>Vincoli orbitali imposti dalla stazione di lancio</td>
<td>176</td>
</tr>
<tr>
<td>5.7</td>
<td>Note e riferimenti bibliografici</td>
<td>177</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>Il problema di Lambert</td>
<td>185</td>
</tr>
<tr>
<td>6.1</td>
<td>Introduzione</td>
<td>185</td>
</tr>
<tr>
<td>6.2</td>
<td>L’equazione di Lambert</td>
<td>187</td>
</tr>
<tr>
<td>6.3</td>
<td>Considerazioni geometriche del problema</td>
<td>190</td>
</tr>
<tr>
<td>6.3.1</td>
<td>Posizione del fuoco vacante</td>
<td>190</td>
</tr>
<tr>
<td>6.3.2</td>
<td>Ellisse di minima energia</td>
<td>192</td>
</tr>
<tr>
<td>6.4</td>
<td>Soluzione del problema di Lambert</td>
<td>196</td>
</tr>
<tr>
<td>6.4.1</td>
<td>Orbite ellittiche</td>
<td>197</td>
</tr>
<tr>
<td>6.4.2</td>
<td>Orbite iperboliche</td>
<td>197</td>
</tr>
<tr>
<td>6.4.3</td>
<td>Orbite paraboliche</td>
<td>197</td>
</tr>
<tr>
<td>6.4.4</td>
<td>Procedura per la soluzione del problema</td>
<td>199</td>
</tr>
<tr>
<td>6.5</td>
<td>Eccentricità dell’orbita di trasferimento</td>
<td>203</td>
</tr>
<tr>
<td>6.6</td>
<td>Calcolo del vettore velocità iniziale</td>
<td>206</td>
</tr>
<tr>
<td>6.7</td>
<td>Il problema di Lambert con variabili universali</td>
<td>208</td>
</tr>
<tr>
<td>6.8</td>
<td>Note e riferimenti bibliografici</td>
<td>212</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>Manovre orbitali</td>
<td>217</td>
</tr>
<tr>
<td>7.1</td>
<td>Equazione di Tsiolkovsky</td>
<td>217</td>
</tr>
<tr>
<td>7.2</td>
<td>Introduzione alle manovre orbitali</td>
<td>222</td>
</tr>
<tr>
<td>7.3</td>
<td>Manovre ad un impulso</td>
<td>223</td>
</tr>
<tr>
<td>7.3.1</td>
<td>Introduzione</td>
<td>223</td>
</tr>
<tr>
<td>7.3.2</td>
<td>Cambiamento della quota di apocentro (o di pericentro)</td>
<td>225</td>
</tr>
<tr>
<td>7.3.3</td>
<td>Cambiamento dei valori di e ed a</td>
<td>226</td>
</tr>
<tr>
<td>7.3.4</td>
<td>Cambiamento di ω con a ed e invariati</td>
<td>227</td>
</tr>
<tr>
<td>7.3.5</td>
<td>Cambiamento di piano orbitale</td>
<td>231</td>
</tr>
<tr>
<td>7.4</td>
<td>Manovre a più impulsi</td>
<td>234</td>
</tr>
<tr>
<td>7.4.1</td>
<td>Manovra di Hohmann</td>
<td>234</td>
</tr>
<tr>
<td>7.4.2</td>
<td>Ottimalità della manovra di Hohmann</td>
<td>240</td>
</tr>
<tr>
<td>7.4.3</td>
<td>Trasferimento biellittico</td>
<td>249</td>
</tr>
<tr>
<td>7.4.4</td>
<td>Cambiamento di piano con manovra a tre impulsi</td>
<td>254</td>
</tr>
<tr>
<td>7.4.5</td>
<td>Manovra di Hohmann con cambiamento di piano orbitale</td>
<td>261</td>
</tr>
<tr>
<td>7.4.6</td>
<td>Manovre a N impulsi</td>
<td>266</td>
</tr>
<tr>
<td>7.5</td>
<td>Trasferimenti orbitali con Δv prefissati</td>
<td>266</td>
</tr>
<tr>
<td>7.5.1</td>
<td>Utilizzo di una manovra di Hohmann</td>
<td>268</td>
</tr>
<tr>
<td>7.5.2</td>
<td>Utilizzo di una manovra generica</td>
<td>273</td>
</tr>
<tr>
<td>7.6</td>
<td>Finestra di lancio</td>
<td>276</td>
</tr>
<tr>
<td>7.7</td>
<td>Note e riferimenti bibliografici</td>
<td>277</td>
</tr>
</tbody>
</table>
# INDICE

8 Rifasamento orbitale e rendez-vous 285
  8.1 Introduzione ............................................. 285
  8.2 Rifasamento per il *rendez-vous* ...................... 286
    8.2.1 Rifasamento con manovra di Hohmann .............. 286
    8.2.2 Rifasamento con manovra biellittica .............. 295
    8.2.3 Rifasamento mediante manovra di Lambert .......... 298
    8.2.4 Rifasamento di orbite geostazionarie ............ 302
  8.3 Manovre di *rendez-vous* terminale .................. 304
    8.3.1 Modello matematico per il moto relativo ........ 307
    8.3.2 Le equazioni di Hill ............................... 311
    8.3.3 Soluzione del sistema linearizzato ............... 313
    8.3.4 Manovra terminale a due impulsi .................. 318
  8.4 Note e riferimenti bibliografici ..................... 324

9 Moto di un satellite in condizioni di spinta continua 331
  9.1 Introduzione ............................................. 331
    9.1.1 Livello di spinta .................................. 332
  9.2 Equazioni del moto in presenza di spinta continua .... 334
    9.2.1 Variazione di velocità ottenibile ................ 335
    9.2.2 Variazioni impulsive di massa .................... 338
  9.3 Introduzione ai trasferimenti a spinta continua .... 339
    9.3.1 Equazioni del moto in forma polare ............... 340
  9.4 Caso di spinta circonferenziale ...................... 343
    9.4.1 Calcolo delle condizioni di fuga ................ 344
  9.5 Caso di spinta radiale ................................ 350
    9.5.1 Calcolo delle condizioni di fuga ................. 351
    9.5.2 Il “pozzo di potenziale” ........................ 360
    9.5.3 Partenza da orbita ellittica ..................... 368
  9.6 Note e riferimenti bibliografici ..................... 370

10 Moto del satellite in presenza di effetti perturbativi 377
  10.1 Introduzione ............................................ 377
  10.2 Accelerazioni di perturbazione ....................... 378
    10.2.1 Sistema di riferimento RTN ....................... 379
    10.2.2 Resistenza aerodinamica ......................... 379
    10.2.3 Asimmetrie del campo gravitazionale ............ 389
    10.2.4 Presenza di un terzo corpo ...................... 397
  10.3 Il metodo di Cowell .................................... 397
  10.4 Il metodo di Encke ..................................... 400
    10.4.1 Procedura di calcolo ............................. 402
    10.4.2 Rettifica dell’orbita ............................ 403
  10.5 Equazioni di perturbazione ........................... 403
10.5.1 Calcolo di $\frac{da}{dt}$ e $\frac{de}{dt}$ .......................... 403
10.5.2 Calcolo di $\frac{di}{dt}$ ........................................ 407
10.5.3 Calcolo di $\frac{d\Omega}{dt}$ .................................... 408
10.5.4 Calcolo di $\frac{d\omega}{dt}$ ..................................... 409
10.5.5 Calcolo di $\frac{dM}{dt}$ ........................................ 411
10.5.6 Calcolo di $\frac{d\nu}{dt}$ ........................................ 412
10.5.7 Utilizzo delle equazioni di perturbazione ................. 412
10.5.8 Formulazione attraverso parametri equinozials ......... 415
10.5.9 Variazioni secolari e di corto periodo .................... 416
10.6 Effetti legati alla resistenza aerodinamica ........................ 416
10.6.1 Variazione istantanea dei parametri orbitali ............ 417
10.6.2 Variazione secolare dei parametri orbitali .............. 418
10.6.3 Variazione della forma dell’orbita ....................... 423
10.7 Effetti legati allo schiacciamento dei poli terrestri .......... 424
10.7.1 Variazione secolare di $\Omega$ e $\omega$ ....................... 425
10.7.2 Inclinazioni critiche ...................................... 428
10.7.3 Orbite eliosincrone ...................................... 432
10.7.4 Variazione secolare dei rimanenti parametri orbitali ... 433
10.8 Note e riferimenti bibliografici ............................... 433

11 Missioni Interplanetarie 441
11.1 Il metodo delle coniche raccordate .......................... 441
11.2 Perturbazioni introdotte da un terzo corpo .................. 444
11.3 Sfera d’influenza ........................................... 447
11.3.1 Approssimazione di $a_{1d}$ ................................. 448
11.3.2 Approssimazione di $a_{2d}$ ................................. 449
11.3.3 Approssimazione di $a_{1S}$ e $a_{2S}$ ...................... 450
11.4 Incontro iperbolico .......................................... 454
11.4.1 Prestazioni nell’incontro iperblico ....................... 459
11.5 Analisi di missione con manovre impulsive ................ 466
11.5.1 Fase eliocentrica ....................................... 467
11.5.2 Fase di fuga ........................................... 468
11.5.3 Fase di cattura ........................................ 472
11.5.4 Differenti strategie di trasferimento .................... 477
11.6 Note e riferimenti bibliografici ............................... 484

II Dinamica e Controllo dei Satelliti 493

12 Equazioni del moto e sistemi di riferimento 495
12.1 Velocità ed accelerazione di un punto ...................... 496
12.2 Centro di massa ........................................... 497
12.3 Quantità di moto ........................................ 497
12.4 Diadici .................................................. 498
12.5 Momento della quantità di moto ...................... 499
12.6 Equazioni cardinali ...................................... 501
12.7 Caso di polo non coincidente con il centro di massa .... 503
12.8 Energia cinetica .......................................... 504
12.9 Terne di riferimento ..................................... 506
12.10 Angoli di Eulero ........................................ 507
12.11 Velocità angolari ........................................ 512
   12.11.1 Proiezione di $\omega_O$ su $T_B$ ................. 512
   12.11.2 Proiezione di $\omega_{BO}$ su $T_B$ ................ 514
12.12 Note e riferimenti bibliografici ..................... 517

13 Moto di satelliti con stabilizzazione passiva .......... 525
13.1 Introduzione ............................................. 525
   13.1.1 Equazioni di Eulero .............................. 528
13.2 Satelliti stabilizzati a singolo spin .................. 532
   13.2.1 Cono mobile e cono fisso ......................... 533
13.3 Moto di un satellite stabilizzato a singolo spin ....... 538
   13.3.1 Precessione diretta e retrograda ............... 540
13.4 Stabilità delle rotazioni ................................ 544
   13.4.1 Dinamica perturbata del satellite ............... 545
13.5 Controllo della velocità angolare di rotazione ......... 546
   13.5.1 Il meccanismo a “a yo-yo” ...................... 547
   13.5.2 Dimensionamento del meccanismo ............... 547
13.6 Dissipazione di energia su satelliti a singolo spin .... 553
13.7 Satelliti con stabilizzazione a doppio spin .......... 560
   13.7.1 Studio della stabilità del sistema ............... 564
13.8 Coppie di disturbo agenti sui satelliti ................ 568
   13.8.1 Coppie dovute al gradiente di gravità ........... 569
   13.8.2 Coppie dovute al campo magnetico terrestre .... 578
   13.8.3 Coppie dovute alla pressione di radiazione solare .. 583
13.9 Equazioni linearizzate per un’orbita circolare ........ 595
13.10 Satelliti stabilizzati a gradiente di gravità ......... 597
   13.10.1 Stabilità del moto ................................ 598
   13.10.2 Ampiezza dell’oscillazione in assetto .......... 606
   13.10.3 Smorzamento delle oscillazioni d’assetto con smorzatori passivi ........................................... 610
13.11 Note e riferimenti bibliografici ..................... 616
Indice

14 Controllo attivo dei satelliti 635
14.1 Dispositivi utilizzati per il controllo attivo 635
14.2 Equazioni del moto di un satellite con rotori interni 640
14.3 Controllo in beccheggio di un satellite 645
  14.3.1 Risposta del sistema in ciclo aperto 646
  14.3.2 Definizione della legge di controllo 647
  14.3.3 Risposta in ciclo chiuso ad un ingresso impulsivo 650
  14.3.4 Calcolo del massimo valore di angolo di assetto 651
  14.3.5 Dimensionamento del controllore 654
  14.3.6 Dimensionamento della ruota di momento angolare 656
14.4 Controllo in rollio-imbardata 659
  14.4.1 Dinamica del satellite in rollio-imbardata 659
  14.4.2 Calcolo della risposta in rollio ad un disturbo costante 662
  14.4.3 Sistema di controllo attivo basato su propulsori 666
  14.4.4 Implementazione del controllore 676
14.5 Note e riferimenti bibliografici 687

III Appendici 701

A Formule universali per le orbite coniche 703
  A.1 Equazioni del moto con variabili universali 703
  A.2 Risoluzione delle equazioni differenziali del moto 705
  A.3 Risoluzione numerica dell’equazione di Keplero 711
  A.4 Calcolo di r e v con i coefficienti di Lagrange 712
    A.4.1 Espressione dei coefficienti di Lagrange 713
  A.5 Interpretazione fisica di \( \chi \) 715
  A.6 Espressioni alternative dei coefficienti di Lagrange 717
    A.6.1 Coefficienti di Lagrange in termini di \( \Delta \nu \) 718
    A.6.2 Coefficienti di Lagrange in termini di \( \Delta E, \Delta F o \Delta D \) 721

B Trigonometria sferica 723

C Modello dell’atmosfera 725
  C.1 Dati di riferimento 725

D Caratteristiche dei principali corpi del Sistema Solare 731
  D.1 Alcune note sulla lettura delle tabelle 731
  D.2 Sole 734
  D.3 Mercurio 736
  D.4 Venere 738
  D.5 Terra 740
  D.6 Luna 742
D.7 Marte ......................................................... 744
D.8 Giove ......................................................... 746
D.9 Saturno ......................................................... 748
D.10 Urano ......................................................... 750
D.11 Nettuno ......................................................... 752
D.12 Plutone ......................................................... 754

Bibliografia ................................................. 762

Indice Analitico ........................................... 763